Livret de révision de mathématiques.

Ce livret de révision a été préparé par les professeurs de mathématiques du lycée de Cachan, il a pour but de vous faire revoir **certaines notions fondamentales** vues en $3^{\text{ème}}$.
Ce **travail personnel** est très important et notre objectif est de vous permettre d'aborder l'année de 2^{de} dans les meilleures conditions. Par expérience, tous ceux qui maîtrisent bien les notions abordées dans ce livret effectuent un bon début d'année.

C'est aussi un outil à conserver et à consulter régulièrement car on y trouvera les **acquis indispensables** pour assimiler le programme de 2^{de}. Ce n'est donc pas un banal cahier de vacances.

Par conséquent, afin de vous motiver, récompenser votre investissement et surtout pour vous aider à identifier les notions à revoir, **ce livret de révisions donnera lieu à une évaluation notée entre 0 et 20 quelques jours après la rentrée pour chaque élève**.
Il est donc indispensable de faire avec **sérieux** les exercices proposés.
Cette évaluation de rentrée ne vise pas à vous piéger car les exercices qui vous y seront proposés seront exactement les mêmes que ceux présents dans ce livret. Ce devrait donc être l'occasion pour tous de débuter l'année avec un **très bon résultat**.

Ce travail personnel sera aussi l'opportunité d'apprendre à **utiliser sa nouvelle calculatrice**. Si vous ne disposez pas encore de celle-ci (une commande groupée par le lycée avec une remise de 10%, vous sera proposée à la rentrée), vous pouvez vous exercer sur l'émulateur en ligne de Numworks depuis un ordinateur ou un smartphone (même hors connexion internet) : `www.numworks.com/fr/simulateur/`

Des réponses (sans démonstration) se trouvent à partir de la page 15.

Quelques conseils d'organisation :

▷ Échelonner votre travail sur plusieurs semaines et donc **ne pas le commencer la dernière semaine** avant la rentrée !

▷ S'assurer que l'on **maîtrise les rappels de cours** avant de faire les exercices, en s'interrogeant au brouillon sur ce que l'on sait concernant le sujet par exemple.

▷ Si vous ne réussissez pas un exercice, **n'abandonnez pas**, allez ouvrir à nouveau votre cours de $3^{\text{ème}}$ pour y retrouver un exercice du même type. N'allez pas regarder les réponses au moindre blocage ! Comme disait Albert Einstein : « *Ce n'est pas que je suis si intelligent, c'est que je reste plus longtemps que les autres sur les problèmes* ».
C'est en bloquant, en se trompant, en se rendant compte de ses erreurs et en les corrigeant que l'on progresse en mathématiques. En effet, buter sur un problème est la meilleure façon de voir ce qui nous a manqué pour arriver au résultat et progresser.

Bienvenue au lycée polyvalent de Cachan !

LYCÉE DE CACHAN

Table des matières

« L'étude des mathématiques est comme le Nil, qui commence en modestie et finit en magnificence. »
Charles Caleb Colton

CALCUL NUMÉRIQUE :

Dans cette partie, il est important d'effectuer les calculs « à la main ».

Dans ce livret, nous appelleront **réel** tous les nombres que vous avez rencontrés dans votre scolarité.

Cette activité doit aussi être l'occasion d'apprendre à utiliser sa nouvelle calculatrice lycée pour **vérifier** ses résultats.

Opérations élémentaires et règles de priorité

Exercice n ° 1 :

Effectuer à la main les calculs suivants :

$$A = -5 + 7 \qquad B = -11 + 8 \qquad C = -2 + 6 + 5 - 4 \qquad D = 3 - (-17) - 5 + 6$$

$$E = -2 + 3 \times 5 \qquad F = (-2 + 3) \times 5 \qquad G = 9 - 2 \times (4 - 17) + 5$$

$$Z = B \times (A - D) + (C - F) \times (E + G)$$

Lors de la vérification des résultats à la calculatrice, vous en profiterez pour vous familiariser avec l'application `Calculs`*. Profitez en pour apprendre à garder en mémoire le résultat de vos calculs.*
Exemple : pour conserver dans a *le premier résultat, saisir :* `-5+7→a`
« → » s'obtient en utilisant `sto→` *par la combinaison de touches* `shift` + `sto→ xʸ F`
La variable « a » s'obtient en utilisant `alpha` + `[ eˣ A`
Vous aurez aussi une vigilance toute particulière lors de l'utilisation des parenthèses...

Décomposition en produit de facteurs premiers

Rappels

- Les nombres premiers à connaître par cœur sont : $\{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$;
- Un exemple de décomposition : $396 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 11 = 2^2 \times 3^2 \times 11$;
- Savoir décomposer en produit de facteurs premiers permet de simplifier des fractions et facilite les factorisations.

Exercice n ° 2 :

Décomposer chacun de ces nombres en produit de facteurs premiers :

$$A = 12 \qquad B = 18 \qquad C = 20 \qquad D = 30 \qquad E = 40 \qquad F = 50$$

$$G = 56 \qquad H = 147 \qquad I = 165 \qquad J = 209 \qquad K = 364$$

Lors de la vérification des résultats à la calculatrice, vous en profiterez pour apprendre l'utilisation de la touche : x *à la puissance* y `sto→ xʸ F`*. Vous vous assurerez, par exemple que* `3²·5` *correspond bien à* $3^2 \times 5 = 45$ *et non pas à* $3^{2\times 5} = 59\,049$ *!*

Savoir bien utiliser le symbole =

Rappels

Le symbole « = » est une relation mathématique. Souvent utilisé abusivement, le symbole « = » a une signification, donc une utilisation mathématique, qui lui est propre :

- écrire qu'une expression est égale à une autre expression signifie que dans tous les cas choisis, dans toutes les situations étudiées, ces deux expressions sont parfaitement identiques ;
- Exemples : $\frac{1}{2} = 0{,}5$ est une affirmation **vraie**. En revanche $\frac{1}{3} \neq 0{,}333\,333\,333$. En effet, $0{,}333\,333\,333$ est une approximation de la fraction $\frac{1}{3}$ mais ne lui est pas exactement égale ;
- ainsi, au lycée, on préférera presque toujours l'écriture fractionnaire (écriture exacte sous forme d'une fraction) à l'écriture décimale (valeur généralement approchée). Cela offre comme principal intérêt de limiter les erreurs dues aux résultats approximatifs dans l'enchainement des calculs.

Exercice n ° 3 :

Relier entre-elles chacune des valeurs numériques. Utiliser un trait plein s'il s'agit d'une égalité. Utiliser un trait pointillé s'il s'agit d'une valeur approchée.

$\boxed{\frac{1}{5}}$ •	• $\boxed{3{,}14}$
$\boxed{\frac{1}{2}+\frac{3}{8}}$ •	• $\boxed{0{,}707}$
$\boxed{\frac{2}{3}}$ •	• $\boxed{0{,}866}$
$\boxed{\pi}$ •	• $\boxed{0{,}001}$
$\boxed{10^{-3}}$ •	• $\boxed{0{,}2}$
$\boxed{\frac{6}{5}-\frac{1}{3}}$ •	• $\boxed{3{,}5}$
$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ •	• $\boxed{0{,}667}$
$\boxed{\frac{7}{2}}$ •	• $\boxed{0{,}875}$
$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ •	• $\boxed{0{,}867}$
$\boxed{\frac{2^{2022}}{2^{2023}}}$ •	• $\boxed{0{,}5}$

Lors de la vérification des résultats à la calculatrice, vous pourrez constater que la calculatrice vous affiche par exemple : $\frac{1}{2} = 0.5$ *alors qu'elle affiche* $\frac{1}{3} \approx 0.333333$.
Le signe = correspond à un résultat exact. Le signe ≈ correspond à un résultat approché .

Simplification de fractions

Rappels

- Simplifier une fraction permet de la rendre « irréductible » ;
- Pour simplifier une fraction, on décompose en produit de facteurs premiers le numérateur et le dénominateur. On effectue ensuite la simplification des termes communs ;
- Un exemple : $\dfrac{15}{6} = \dfrac{3 \times 5}{2 \times 3} = \dfrac{\cancel{3} \times 5}{2 \times \cancel{3}} = \dfrac{5}{2}$;
- À noter : Si, à l'issue des simplifications, il ne reste que 1 au dénominateur, alors le résultat peut s'écrire sous forme de nombre entier : $\dfrac{5}{1} = 5$

Exercice n ° 4 :

Simplifier chacune des fractions pour la rendre irréductible :

$$A = \frac{4}{2} \qquad B = \frac{12}{3} \qquad C = \frac{10}{3} \qquad D = \frac{20}{12}$$

$$E = -\frac{12}{30} \qquad F = \frac{6 \times (-10) \times 5}{-3 \times 5 \times 30} \qquad G = \frac{210}{-165}$$

Lors de la vérification des résultats à la calculatrice, vous en profiterez pour apprendre à bien maîtriser l'écriture naturelle des fractions afin d'obtenir un résultat sous forme fractionnaire (fraction irréductible) ainsi que son approximation décimale.

Calculs enchaînés avec des fractions

Rappels

Dans cette activité, vous devez à la fois respecter la priorité des opérations et simplifier les fractions pour cela :

- Simplifier dès que possible les expressions données (avant d'aller plus loin) ;
- Mettre les fractions au même dénominateur et ne pas oublier que diviser par un nombre, c'est multiplier par son inverse ;
- Une fois les calculs effectués, vérifiez votre résultat à l'aide de la calculatrice.

Exercice n ° 5 :

Effectuer les calculs en écriture fractionnaire et donner les nombres ci-dessous sous forme de fraction irréductible (les étapes de calcul doivent apparaître) :

$$A = \frac{2}{5} + \frac{4}{10} \qquad B = \frac{3}{7} + \frac{1}{4} \qquad C = 1 - \frac{2}{3}$$

$$D = \frac{1}{5} - \frac{6}{5} \times \frac{2}{3} \qquad E = \frac{2}{3} + \frac{5}{2} \times \frac{4}{7} \qquad F = \frac{7}{10} - \frac{2}{3 \times \frac{2}{5}}$$

$$G = \frac{\frac{9}{5}}{\frac{3}{4}} \qquad H = \frac{\frac{7}{4} - 2}{\frac{5}{4} + 3} \qquad I = 3 \times \left(\frac{7}{6} - \frac{5}{9} - \frac{1}{3}\right) \times \frac{6}{5}$$

Calculs avec des puissances de 10

Rappels

Le calcul en puissance de 10 est très utilisé pour la notation scientifique.
On dit qu'un nombre est écrit en **notation scientifique** lorsqu'il est écrit sous la forme $a \times 10^n$, où a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$ et n est un nombre entier relatif.
Pour modifier les écritures avec des puissances, on dispose de ces formules qui sont valables quels que soient le nombre réel a et quels que soient les entiers relatifs m et n :

- $(a^n)^m = a^{n \times m}$ $\Longrightarrow$ Exemple : $(10^3)^3 = 10^{(3\times3)} = 10^9$
- $a^n \times a^m = a^{n+m}$ $\Longrightarrow$ Exemple : $10 \times 10^2 = 10^1 \times 10^2 = 10^{1+2} = 10^3$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^n \times a^{-m} = a^{n-m}$ $\Longrightarrow$ Exemple : $\dfrac{10^2}{10^5} = 10^{2-5} = 10^{-3}$

Exercice n ° 6 :

Effectuer les calculs suivants et donner chaque résultat sous la forme d'une écriture scientifique puis sous la forme d'un nombre décimal.

$A = 10^{62} \times 10^5$

$B = \dfrac{10^{14}}{10^{-2}}$

$C = 3 \times \dfrac{10^5}{10^2}$

$D = \dfrac{10^3 \times 10^{-6}}{10^{-5}}$

$E = \dfrac{\frac{1}{2} \times 10^5 \times 16 \times 10^{-2}}{2 \times (10^3)^4 \times 10^{-6}}$

$F = 2 \times 10^2 - \dfrac{5 \times 10^{-5}}{10^{-6}} + \dfrac{5}{2} \times 10^{-1}$

Lors de la vérification des résultats à la calculatrice, soyez vigilant sur le respect de l'écriture fractionnaire. Vous observerez aussi la notation scientifique de votre calculatrice. Par exemple, `1E9` *signifie* 1×10^9.

CALCUL ALGÉBRIQUE :

Le calcul littéral est une généralisation du calcul numérique. Il est très utilisé en seconde (et au lycée d'une manière générale) notamment lors des démonstrations.
C'est un outil essentiel en mathématiques et plus globalement en sciences car il permet de raisonner de manière plus efficace dans certaines situations (de part la généralisation qu'il autorise notamment).

Pour être efficace en calcul algébrique il faut disposer de bons automatismes en calculs numériques. On ne maitrise pas cet outil par magie, seul l'entrainement permet de s'améliorer !

Expression développée ou factorisée ?

Rappels

Une expression (numérique ou littérale) peut s'écrire de différentes manières. Au lycée, on retiendra principalement les deux suivantes :
▷ la forme **développée** que l'on peut reconnaître si la dernière opération à effectuer est une addition ou une soustraction ;
▷ la forme **factorisée** que l'on peut reconnaître si la dernière opération à effectuer est une multiplication ou une soustraction.

Chacune de ces deux formes a ses intérêts et avantages spécifiques. Il est donc important d'être capable de reconnaître quelle est la forme d'une expression et de savoir passer de l'une à l'autre (quand c'est possible).

Exercice n ° 7 :

Parmi les expressions suivantes, souligner en bleu les expressions développées et en rouge les expressions factorisées.

$$x + 3 \times 5 \quad ; \quad 5x + 7 \quad ; \quad (6x + 4) \times 5 \quad ; \quad (4x - 5) - (7x + 3) \quad ; \quad (x + 6)^2 .$$

Pour vous entraîner davantage, voici un petit jeu qui vous permettra de manipuler ces formes d'expressions.
Pour pouvoir apparaître dans le tableau de scores, vous pourrez entrer un pseudonyme, évitez d'écrire votre nom et/ou prénom réel !

▷ Niveau intermédiaire : `https://wordwall.net/fr/resource/3008218`

▷ Niveau confirmé : `https://wordwall.net/fr/resource/2135161`

Développer et réduire

Rappels

▷ Développer une expression consiste à la transformer en une somme (ou différence) de termes ;

▷ Pour ce faire, on a différents moyens. On peut utiliser :

- la simple distributivité : pour tout réel x, $2 \times (3x-1) = 2 \times 3x + 2 \times (-1) \;=\; 6x - 2$;
- Un exemple de double-distributivité :
  Pour tout réel x, $\begin{aligned}(2x+1)(3x-4) &= 2x \times 3x + 2x \times (-4) + 1 \times 3x + 1 \times (-4) \\ &= 6x^2 - 8x + 3x - 4 \\ &= 6x^2 - 5x - 4\,;\end{aligned}$
- Les identités remarquables dans le sens du développement, quels que soient les réels a et b :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Toute la difficulté de l'exercice consiste à identifier a et b.

Si tout cela ne vous rappellent rien, **ne vous inquiétez pas**, c'est tout-à-fait normal !!
Il est possible qu'au collège, vous n'ayez vu que la simple distributivité et la toute dernière identité remarquable.
Nous nous sommes cependant dit que ce serait dommage de ne pas rajouter dans le livret la double-distributivité et les autres identités remarquables car la double-distributivité consiste à "réaliser deux fois la simple distributivité" et les deux premières identités remarquables sont obtenues à l'aide de cette double-distributivité tout comme la dernière (ce qui peut être un bon exercice pour vous de le retrouver !).

Cela signifie par ailleurs que nous ne vous interrogerons que sur la simple distributivité et la troisième identité remarquable dans le devoir de rentrée.

Exercice n ° 8 :

Développer puis simplifier "autant que possible" chacune de ces expressions :

$$A = 2\,(7x+3) \quad ; \quad B = \frac{1}{2}\,(x+4) \quad ; \quad C = -2\,(3-x)$$

$$D = 2x(5-3x) \quad ; \quad E = -5x\left(x - \frac{1}{25}\right) \quad ; \quad F = 3(2x-1) - 5(7-x)$$

$$G = 3x\,(4+2x) - 6\left(1+x^2\right) \quad ; \quad H = -4x\left(\frac{3x}{4} + 3\right) + \frac{7}{4}\left(3 - x^2\right)$$

$$I = (x-4)\,(x+4) \quad ; \quad J = (x+3)\,(3-x) \quad ; \quad K \;=\; (2x-1)(1+2x)$$

Exercice n ° 9 *(qui ne sera pas évalué au contrôle de rentrée mais utilisé toute l'année)* :

Développer puis simplifier "autant que possible" chacune de ces expressions :

$$L = (2-x)(1-x) \quad ; \quad M = (x-2)^2 \quad ; \quad N = (8x+1)^2$$

$$O = (2x-1)(1+2x) \quad ; \quad P = (4x-7)(2x-3) - (2x-3)^2 \quad ; \quad Q = (6-x)(6+x) - (6-x)(4-x)$$

Factoriser

Rappels

- ▷ Factoriser consiste à transformer une somme en un produit (ou un quotient) de facteurs ;
- ▷ Pour ce faire, on a différents moyens. On peut :

- Reconnaitre un facteur commun :
  Quels que soient les nombres ou expressions k, a et b, $ka + kb = k\,(a+b)$.

$$8x - 20 = 4 \times 2x - 4 \times 5 = 4(2x-5)$$

$$2(x+1) - 3x(x+1) = (x+1)(2-3x)$$

- Utiliser les identités remarquables dans le sens de la factorisation.
  Quels que soient les réels a et b :

  $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$ Exemple : $4x^2+12x+9 = (2x)^2 + 2\times(2x)\times 3 + 3^2 = (2x+3)^2$
  $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$ Exemple : $x^2+16-8x = x^2 - 2\times x \times 4 + 4^2 = (x-4)^2$
  $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ Exemple : $25-4x^2 = 5^2-(2x)^2 = (5-2x)(5+2x)$

  Toute la difficulté de l'exercice consiste à identifier a et b.

- Réduire au même dénominateur :
  Pour tout réel $x \neq 1$: $\dfrac{3}{x-1}+2 = \dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2\,(x-1)}{x-1} = \dfrac{3+2\,(x-1)}{x-1} = \dfrac{2+2x-2}{x-1} = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Comme pour la partie concernant le développement, seule l'identité remarquable $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ est à connaitre par cœur pour l'entrée en seconde.
Le devoir de rentrée ne comportera aucune question nécessitant de connaitre les deux autres identités remarquables.

Remarque : Une des façons de reconnaître un facteur commun est de décomposer un nombre en produits de facteurs premiers et également de se rappeler qu'une puissance consiste à multiplier plusieurs fois par la même expression (par exemple : $x^4 = x \times x^3 = x^2 \times x^2 = x \times x \times x \times x$...).

Exercice n ° 10 :

Factoriser "*autant que possible*" chacune de ces expressions :

$$A = 2x - x^2 \quad ; \quad B = -3x^3 + 9x^2 \quad ; \quad C = 7x(x-3) - 7x(x+2)$$

$$D = (5x-1)^2 + (5x-1)(3-x) \quad ; \quad E = \frac{2}{x} + 1 \quad ; \quad F = \frac{3x}{x+2} - 5$$

$$G = 9 - 9x^2 \quad ; \quad H = (x+1)^2 - (2x+3)^2 \quad ; \quad I = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

Exercice n ° 11 *(qui ne sera pas évalué au contrôle de rentrée mais utilisé toute l'année)* :

Factoriser chacune de ces expressions :

$$J = 4x^2 + 4x + 1 \quad ; \quad K = x^2 - 10x + 25 \quad ; \quad L = 100 + 60x + 9x^2$$

Si vous voulez vous entrainer davantage sur les développements et les factorisations, pour bien démarrer la seconde, nous vous recommandons l'application ***domino CL*** que vous pouvez installer sur tout smartphone.

Résoudre une équation

Rappels

▷ Théorie :

- Une **équation à une inconnue** (souvent appelée x) est une égalité vraie ou fausse, dans laquelle intervient un nombre inconnu désigné par une lettre (habituellement x).
  Une **solution de l'équation** est une valeur pour laquelle l'égalité est vérifiée.
  Résoudre une telle équation, c'est déterminer toutes les solutions (si elles existent) de cette équation.
- Deux équations sont dites **équivalentes** si elles ont exactement les mêmes solutions.

▷ Pour résoudre une équation, on est souvent amené à la transformer par étapes successives, en d'autres équations équivalentes jusqu'à éventuellement réussir à isoler l'inconnue. On peut pour cela utiliser les propriétés ci-dessous :
• additionner (et soustraire) un même nombre aux deux membres d'une équation ;
• multiplier (et diviser) par un même nombre non nul les deux membres d'une équation (et pas uniquement une partie !).

Un exemple :

$$\begin{aligned} 2x-1=3 &\iff 2x=3+1 \\ &\iff x=\frac{4}{2} \\ &\iff x=2 \end{aligned}$$

Cette équation admet une unique solution $x=2$.

Vous avez sans doute vu au collège d'autres types d'équations de la forme $(x+3)(2x-1)=0$ pour lesquelles il vous a fallu utiliser la propriété du produit nul (« *Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul* »).
De même vous devez également savoir comment faire pour résoudre des inéquations.
Pour ne pas alourdir ce livret, nous avons choisi de ne pas faire apparaitre d'exercices concernant ces notions dans ce livret. Nous les reverrons donc à la rentrée et ni la règle du produit nul ni la résolution d'inéquations ne seront présentes dans le devoir de rentrée.
Cependant, si jamais vous cherchiez à vous occuper pendant les vacances, ce pourrait être une bonne chose à revoir !

Exercice n ° 12 :

Résoudre chacune des équations suivantes :

$A.\quad 5x=20 \qquad B.\quad x-5=20 \qquad C.\quad x+5=20 \qquad D.\quad \frac{x}{5}=20 \qquad E.\quad 5(x-5)=20$

$F.\quad 1+2x=-9 \qquad G.\quad 2x-3=7x+2 \qquad H.\quad \frac{1}{2}x=\frac{1}{3}x+4$

$I.\quad \frac{x+2}{2}=\frac{x-3}{3} \qquad J.\quad 4(2-x)=\frac{7}{2} \qquad K.\quad 4x+21=3-7x$

Vous profiterez de cette activité pour découvrir l'application `Equations` *de votre calculatrice.*
Vous pouvez `Ajouter une equation` *de type* `Vide` *comme par exemple :* $2x-1=3$
En validant `Resoudre l'equation` *vous pouvez vérifier le résultat obtenu à la main :* $x=2$

ATTENTION : la calculatrice vous permet de ***vérifier*** *vos résultats. Une réponse obtenue uniquement à la calculatrice ne pourra pas être prise en compte en devoir ou au baccalauréat.*

Si vous voulez vous entrainer davantage pour bien démarrer la seconde, nous vous recommandons l'application ***The Equation game*** que vous pouvez installer sur tout smartphone.

Jouer avec les équations

Rappels

▷ Une égalité entre deux expressions $f(x)$ et $g(x)$ a lieu, et on la note $f(x) = g(x)$, si pour toutes les valeur prises par l'inconnue x, les deux expressions $f(x)$ et $g(x)$ ont la même valeur exacte ;

Pour déterminer si une égalité $f(x) = g(x)$ est vraie ou non, on dispose des méthodes ci-dessous :

• **Pour démontrer qu'une égalité** $f(x) = g(x)$ **n'est pas vraie pour tout réel x,** il suffit de trouver une valeur de x pour laquelle l'égalité est fausse. C'est un **contre exemple**.

• **Pour démontrer qu'une égalité** $f(x) = g(x)$ **est vraie pour tout réel** x, des exemples ne suffisent pas ! Il faut le prouver en conservant l'inconnue x qui représente l'infinité des nombres possibles. On doit alors utiliser les techniques de développement et/ou de factorisation pour transformer :

⋆ $f(x)$ pour arriver à $g(x)$ ⋆ $g(x)$ pour arriver à $f(x)$

⋆ $f(x)$ et $g(x)$ pour arriver à une même troisième expression identique. ⋆ $f(x) - g(x)$ pour obtenir 0.

▷ Deux exemples : Les égalités suivantes sont-elles vraies pour tout réel x ?

a. $1 + x + x^2$ et $2x + 1$? **b.** $3x^2 - x(x - 4) - 6$ et $2(x^2 + 3x + 1) - 8 - 2x$?

a. Pour $x = 2$, $1 + x + x^2 = 7$ mais $2x + 1 = 5$. L'égalité n'est donc pas vraie pour tout réel x.

b. En testant plusieurs valeurs de x, on conjecture que l'égalité est vraie pour tout réel x.
Démontrons-le en développant les deux membres : pour tout réel x,
$3x^2 - x(x - 4) - 6 = 3x^2 - (x^2 - 4x) - 6 = 3x^2 - x^2 + 4x - 6 = 2x^2 + 4x - 6$
et $2(x^2 + 3x + 1) - 8 - 2x = 2x^2 + 6x + 2 - 8 - 2x = 2x^2 + 4x - 6$.
On obtient finalement la même expression pour les deux, l'égalité est donc bien vraie pour tout réel x.

Exercice n ° 13 :

Relier entre-elles chacune des équations qui doivent être justes quelque soit le nombre réel x. Vous prouverez, par le calcul, la validité de l'égalité entre les différentes expressions algébriques.
A la fin, deux membres ne doivent pas être reliés car ils ne sont pas égaux entre-eux. En admettant que l'expression de la colonne de gauche est juste, proposer une correction de l'expression de la colonne de droite.

$3x(2x + 1) - 4$ •	• $(3x + 2)^2 - (x + 7)(3x + 2)$
$2x(x - 1) - 4(x - 1)$ •	• $2x(x - 2) + 5\,(x - 2)$
$(x - 5)(x + 5)$ •	• $x(18x - 23)$
$4x(x - 5) + 9$ •	• $(x - 1)(2x - 4)$
$(4 + x)^2 - x^2$ •	• $(2x - 4)\,(2x + 4) + 5\,(5 - 4x)$
$(2x - 5)(3x + 2)$ •	• $3x$
$(6 - x) \times \dfrac{x}{2} + 0,5x^2$ •	• $6x - 1$
$2x^2 + x - 10$ •	• $-(x + 6)(x - 6)$
$36 - x^2$ •	• $8(2 + x)$
$6x(3x - 5) + 7x$ •	• $x^2 - 25$

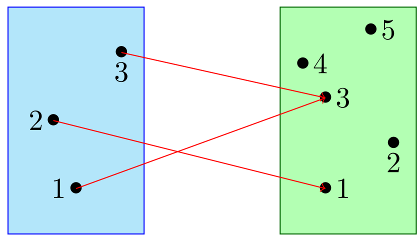
N'oubliez pas que vous pouvez développer ou factoriser pour transformer les expressions !

FONCTIONS : DÉTERMINER IMAGES ET ANTÉCÉDENTS :

Rappels :

Une fonction est une relation entre deux ensembles.

▷ Pour définir une fonction, on a besoin de trois données :
- un ensemble de départ appelé **ensemble de définition**;
- un ensemble d'arrivée;
- un procédé qui, à tout élément de l'ensemble de définition associe **un et un seul** élément de l'ensemble d'arrivée.



Ensemble de définition Ensemble d'arrivée

▷ Une fonction peut être représentée de plusieurs façons en fonction du problème que l'on cherche à résoudre.

Par une formule explicite :

Une formule est un programme de calcul, qui à tout nombre de l'ensemble de départ, appelé **antécédent** associe le nombre d'arrivé appelé l'**image**.

Ci-dessous trois exemples de fonctions définies par des formules explicites :
- Pour tout réel x, $f(x) = (x-6)^2$.
- Pour tout réel x, $g(x) = 3x - 7$.
- Pour tout réel x non nul, $h(x) = \dfrac{1}{x}$.

Méthode pour déterminer l'image d'un nombre $\boldsymbol{a}$

Dans le cas d'une fonction définie par une expression algébrique (formule explicite) $f(x)$, on remplace tous les x dans l'expression par le nombre a.

Avec les fonctions et g de l'exemple précédent,
L'image de $\boldsymbol{a = 4}$ par la fonction f est : $f(\mathbf{4}) = (\mathbf{4} - 6)^2 = (-2)^2 = \mathbf{4}$.
L'image de $\boldsymbol{a = -2}$ par la fonction g est : $f(\mathbf{-2}) = 3 \times (\mathbf{-2}) - 7 = \mathbf{-13}$.

Par un tableau de valeurs

Un **tableau de valeurs** comporte deux lignes (ou colonnes), sur la première on indique des antécédents et sur la seconde leur image par la fonction considérée.

Voici un tableau de valeurs de la fonction f de l'exemple précédent :

x	-2	0	4	5	6	7	$8,5$	antécédent
$f(x)$	64	36	4	1	0	1	$6,25$	image

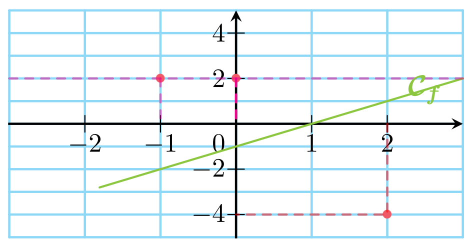
Le tableau nous indique que 64 est l'image de -2 par f ou autrement dit que $f(-2) = 64$.
Il nous informe aussi que 6 est un antécédent de 0 par f ou autrement dit, que $f(6) = 0$.

Par une courbe

La **courbe représentative** (ou **représentation graphique**) d'une fonction f consiste en l'ensemble des points du repère de coordonnées $\big(x; f(x)\big)$. On la note $\mathscr{C}_f$.

On lit sur l'axe des abscisses les antécédents et sur l'axe des ordonnées les images.

Un nombre peut avoir un, plusieurs ou aucun antécédent.
Un nombre n'a qu'une image.

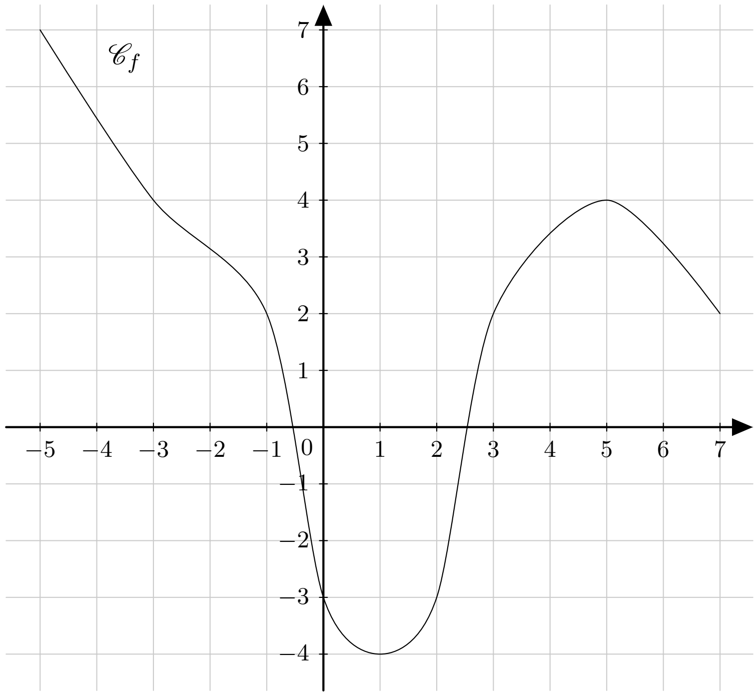


L'image de 0 par la fonction f est 2, celle de 2 est -4 (pointillés rouges).
Les antécédents de 2 par la fonction f sont -1 et 0 (pointillés magenta). Le nombre 3 n'a pas d'antécédents par la fonction f.

Recherche d'images et d'antécédents, Exercice 14 :

Le but de cet exercice est de compléter le pixel art de la page suivante. Chaque réponse permet de colorier le nombre correspondant dans le pixel art.

On a tracé la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5\,;\,7]$.



1. L'image de -1 par la fonction f est à colorier en jaune.
2. Si ils existent, le ou les antécédents de 2 par la fonction f sont à colorier en violet.
3. L'image de 1 par la fonction f est à colorier en magenta (ou rose foncé).
4. Si ils existent, le ou les antécédents de 4 par la fonction f sont à colorier en rouge.
5. Si ils existent, le ou les antécédents de 7 par la fonction f sont à colorier en orange.
6. L'image de -3 par la fonction f est à colorier en vert.

On connaît de plus l'expression d'une fonction g définie sur le même intervalle par :

$$g(x) = -0,25x^2 + 0,75x + 8$$

.

7. L'image de 0 par la fonction g est à colorier en bleu clair.
8. L'image de -4 par la fonction g est à colorier en noir.
9. L'image de -5 par la fonction g est à colorier en rose pale.

0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	-1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	2	2	1	0	0	0	0	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	9	9	9	1	8	8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	2	2	1	0	0	0	1	-4	-1	-1	-1	-4	-1	1	9	9	9	1	8	8	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	2	2	1	0	1	-4	-4	-4	-1	-4	-4	-4	1	9	1	9	9	1	8	8	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	2	2	1	1	-4	-4	-4	-4	-4	-4	5	1	9	9	1	9	1	4	4	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	2	2	2	2	1	-4	5	5	-4	5	5	1	9	9	1	9	9	1	4	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	2	2	2	2	1	5	5	5	5	5	5	1	1	9	9	9	1	4	4	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1	2	2	2	2	2	1	5	5	5	5	1	9	9	9	9	9	9	1	4	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	9	1	1
0	0	0	0	1	0	1	2	2	2	2	1	5	-5	5	5	1	9	9	9	9	9	9	9	1	2	2	2	2	1	0	0	0	0	0	1	1	9	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	1	-5	-5	-5	-5	-5	1	9	9	9	9	9	9	9	1	2	2	2	1	0	0	0	1	1	9	9	9	9	1	1	0
0	0	0	0	0	0	1	-5	-5	1	1	-5	-5	-5	2	-5	2	2	1	9	9	9	9	9	9	1	2	2	-5	1	0	1	1	9	9	9	9	9	9	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	2	-5	-5	-5	-5	2	2	2	2	2	1	9	9	9	9	9	9	9	1	2	-5	-5	-5	1	9	9	9	9	9	9	9	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	4	8	8	1	9	9	9	9	9	9	1	-5	-5	1	1	9	9	9	9	9	9	9	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	4	1	4	2	4	4	4	4	8	8	1	1	1	9	9	9	9	1	9	1	1	9	9	9	9	9	9	9	9	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	4	4	4	4	8	1	1	9	9	9	9	9	9	9	9	9	1	9	9	9	9	9	9	9	9	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	8	4	8	1	9	1	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	9	9	1	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	1	5	5	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	9	1	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	1	5	5	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	9	9	9	9	9	1	9	9	9	9	9	9	9	1	5	-4	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	9	9	9	9	9	9	1	9	9	9	9	9	9	1	-4	-4	-4	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	9	9	9	9	9	9	1	9	9	9	9	9	9	9	1	-4	-4	-4	-4	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	9	1	9	9	9	9	9	9	1	1	-4	-4	3	3	3	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	-2	-2	-2	-2	-2	1	-4	-4	-4	9	9	9	9	9	1	-4	3	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	1	-3	-3	-3	-4	9	9	9	9	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	-2	1	-2	-2	1	-2	-2	1	-5	-5	-5	-3	-4	9	9	9	9	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	-2	-2	-2	-2	-2	-2	1	2	2	2	2	-5	-3	-4	9	9	9	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	4	4	4	4	4	2	-5	-3	-4	9	9	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	-4	-3	-5	2	4	8	8	8	4	2	-5	-3	-4	9	9	9	1	3	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	-3	-5	2	4	8	3	3	8	4	2	-5	-3	-4	9	9	1	1	3	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-4	-3	-5	2	4	8	3	8	4	2	-5	-3	-4	9	9	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	-3	-5	2	4	8	3	8	4	2	-5	-3	-4	9	9	9	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	-3	-5	2	4	8	3	8	4	2	-5	-3	-4	9	9	9	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	-4	-3	-5	2	4	8	3	8	4	2	-5	-3	-4	9	9	9	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	-4	-3	-5	2	4	8	3	8	4	2	-5	-3	-4	9	9	9	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	-4	-3	-5	2	4	8	8	8	4	2	-5	-3	-4	9	9	9	9	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	-4	-3	-5	2	4	4	4	4	4	2	-5	-3	-4	9	9	9	9	1	1	1	1	1	1	4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	-4	-3	-5	2	2	2	2	2	2	-5	-3	-4	9	9	9	9	9	9	1	7	8	8	4	4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	-4	-3	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-3	-3	-4	9	9	9	9	9	9	1	7	8	4	4	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	9	9	-4	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-4	-4	9	9	9	9	9	9	9	9	1	1	4	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	9	9	9	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	1	0	1	1	-5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	1	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	9	9	9	9	9	9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	9	9	9	9	9	9	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	9	9	9	9	9	9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	9	9	9	9	9	9	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	9	9	9	9	9	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	9	9	9	9	9	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	9	9	9	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	9	9	9	9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	9	9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	9	9	9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	9	9	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

Correction des exercices :

« *Mais je ne m'arrête point à expliquer ceci plus en détail à cause que je vous ôterais le plaisir de l'apprendre par vous-même, et l'utilité de cultiver votre esprit en vous y exerçant.* » René Descartes

Parce que c'est en trébuchant que l'on apprend à marcher, vous ne trouverez pas dans cette partie tous les détails du corrigé des exercices.
Seules les réponses sont indiquées et il est important que vous essayez **par vous-même** de les retrouver !

CORRECTION : CALCUL NUMÉRIQUE :

Opérations élémentaires et règles de priorité, Exercice 1 :

$$A = 2 \qquad B = -3 \qquad C = -\cancel{2} + \cancel{6} + 5 - \cancel{4} = 5 \qquad D = 3 + 17 - 5 + 6 = 26 - 5 = 21$$

$$E = -2 + 15 = 13 \qquad F = 1 \times 5 = 5 \qquad G = 9 - 2 \times (-13) + 5 = 9 + 26 + 5 = 40$$

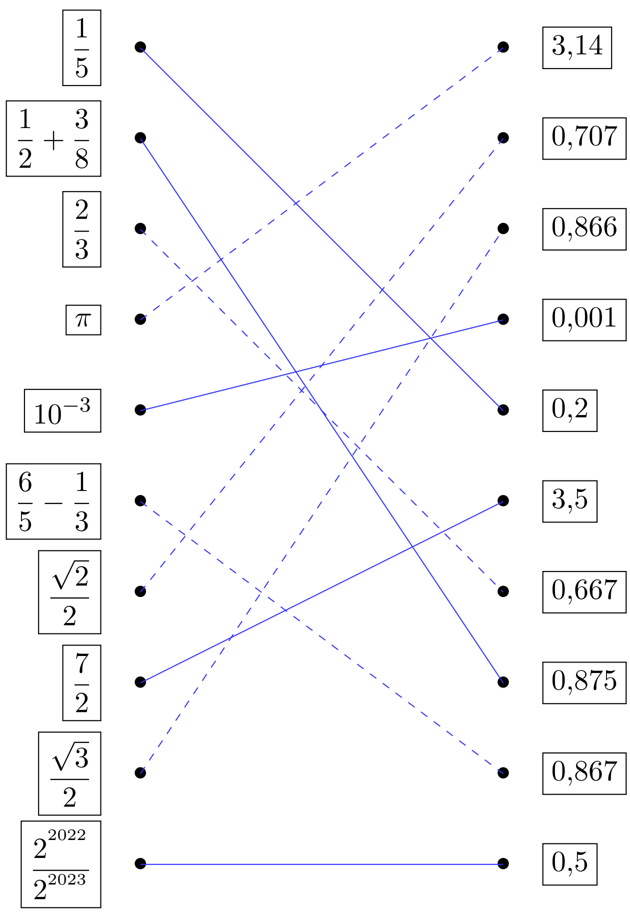
$$Z = -3 \times (2 - 21) + (5 - 5) \times (13 + 40) = -3 \times (-19) + 0 \times 53 = 57$$

Décomposition en élément simples, Exercice 2 :

$$A = 2^2 \times 3 \qquad B = 2 \times 3^2 \qquad C = 2^2 \times 5 \qquad D = 2 \times 3 \times 5 \qquad E = 2^3 \times 5 \qquad F = 2 \times 5^2$$

$$G = 2^3 \times 7 \qquad H = 3 \times 7^2 \qquad I = 3 \times 5 \times 11 \qquad J = 11 \times 19 \qquad K = 2^2 \times 7 \times 13$$

Savoir bien utiliser le symbole "=", Exercice 3 :



Simplification de fractions, Exercice 4 :

$$A=\frac{2\times\cancel{2}}{\cancel{2}\times 1}=\frac{2}{1}=2\qquad B=\frac{2^2\times\cancel{3}}{\cancel{3}\times 1}=4\qquad C=\frac{2\times 5}{3}=\frac{10}{3}\qquad D=\frac{\cancel{2}\times\cancel{2}\times 5}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\times 3}=\frac{5}{3}$$

$$E=-\frac{\cancel{2}\times 2\times\cancel{3}}{\cancel{2}\times\cancel{3}\times 5}=-\frac{2}{5}\qquad F=\frac{(2\times 3)\times(-2\times 5)\times 5}{-3\times 5\times(2\times 3\times 5)}=\frac{\cancel{-1}\times 2^{\cancel{2}}\times\cancel{3}\times\cancel{5^2}}{\cancel{-1}\times\cancel{2}\times 3^{\cancel{2}}\times\cancel{5^2}}=\frac{2}{3}\qquad G=\frac{2\times\cancel{3}\times\cancel{5}\times 7}{-1\times\cancel{3}\times\cancel{5}\times 11}=-\frac{14}{11}$$

Calculs enchainés avec des fractions, Exercice 5 :

$$A=\frac{2}{5}+\frac{4}{10}=\frac{2}{5}+\frac{2\times\cancel{2}}{5\times\cancel{2}}=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{2+2}{5}=\frac{4}{5}$$

$$B=\frac{3}{7}+\frac{1}{4}=\frac{3\times 4}{7\times 4}+\frac{1\times 7}{4\times 7}=\frac{12}{28}+\frac{7}{28}=\frac{12+7}{28}=\frac{19}{28}$$

$$C=1-\frac{2}{3}=\frac{1\times 3}{1\times 3}-\frac{2}{3}=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$D=\frac{1}{5}-\frac{2\times\cancel{3}}{5}\times\frac{2}{\cancel{3}}=\frac{1}{5}-\frac{4}{5}=\frac{1-4}{5}=-\frac{3}{5}$$

$$E=\frac{2}{3}+\frac{5}{\cancel{2}}\times\frac{2\times\cancel{2}}{7}=\frac{2}{3}+\frac{10}{7}=\frac{2\times 7}{3\times 7}+\frac{10\times 3}{7\times 3}=\frac{14}{21}+\frac{30}{21}=\frac{14+30}{21}=\frac{44}{21}$$

$$F=\frac{7}{10}-\frac{\cancel{2}}{3\times\frac{\cancel{2}}{5}}=\frac{7}{10}-\frac{1}{\frac{3}{5}}=\frac{7}{10}-1\times\frac{5}{3}=\frac{7}{10}-\frac{5}{3}=\frac{7\times 3}{10\times 3}-\frac{5\times 10}{3\times 10}=\frac{21-50}{30}=\frac{-29}{30}$$

$$G=\frac{9}{5}\times\frac{4}{3}=\frac{\cancel{3}\times 3}{5}\times\frac{4}{\cancel{3}}=\frac{12}{5}$$

$$H=\frac{\frac{7}{4}-\frac{8}{4}}{\frac{5}{4}+\frac{12}{4}}=\frac{\frac{-1}{4}}{\frac{17}{4}}=-\frac{1}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{4}}{17}=-\frac{1}{17}$$

$$I=\left(\frac{7}{6}-\frac{5}{9}-\frac{1}{3}\right)\times\frac{18}{5}=\left(\frac{7\times 3}{6\times 3}-\frac{5\times 2}{9\times 2}-\frac{1\times 6}{3\times 6}\right)\times\frac{18}{5}=\left(\frac{21-10-6}{18}\right)\times\frac{18}{5}=\frac{\cancel{5}}{\cancel{18}}\times\frac{\cancel{18}}{\cancel{5}}=1$$

Calculs avec des puissances de 10, Exercice 6 :

$$A=10^{62}\times 10^5=10^{62+5}=10^{67}\qquad B=\frac{10^{14}}{10^{-2}}=10^{14-(-2)}=10^{16}\qquad C=3\times\frac{10^5}{10^2}=3\times 10^{5-2}=3\times 10^3$$

$$D=\frac{10^{3-6}}{10^{-5}}=\frac{10^{-3}}{10^{-5}}=10^{-3-(-5)}=10^2=100\qquad E=\frac{8\times 10^{5-2}}{2\times 10^{3\times 4}\times 10^{-6}}=\frac{4\times 10^3}{10^{12-6}}=4\times 10^{3-6}=4\times 10^{-3}=0{,}004$$

$$F=2\times 10^2-5\times 10^{-5-(-6)}+\frac{5}{2}\times 10^{-1}=2\times 100-5\times 10+2{,}5\times 10^{-1}=200-50+0{,}25=150,25=1,5025\times 10^2$$

CORRECTION : CALCUL ALGÉBRIQUE :

Expression développée ou factorisée ?, Expression 7 :

Expressions sous forme développée : $x+3\times 5$; $5x+7$; $(4x-5)-(7x+3)$

Expressions sous formes factorisées : $(6x+4)\otimes 5$; $(x+6)^2 = (x+6)\otimes(x+6)$.

Développer et réduire, Exercice 8 :

$A = 2\times 7x + 2\times 3 = \boxed{14x+6}$; $B = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\times 4 = \boxed{\frac{x}{2}+2}$; $C = -2\times 3 - 2\times(-3) = \boxed{-6+2x}$

$D = 2x\times 5 + 2x\times(-3x) = 10x - 6x^2 = \boxed{-6x^2+10x}$

$E = -5x\times x - 5x\times\left(-\frac{1}{25}\right) = -5x^2 + \frac{5x}{25} = \boxed{-5x^2+\frac{x}{5}}$

$F = 3\times 2x + 3\times(-1) - 5\times 7 - 5\times(-x) = 6x - 3 - 35 + 5x = \boxed{11x-38}$

$G = 3x\times 4 + 3x\times 2x - 6\times 1 - 6\times x^2 = 12x + 6x^2 - 6 - 6x^2 = \boxed{12x-6}$

$H = -4x\times\frac{3x}{4} - 12x + \frac{7\times 3}{4} - \frac{7x^2}{4} = -3x^2 - 12x + \frac{21}{4} - \frac{7}{4}x^2 = \boxed{-\frac{19}{4}x^2 - 12x + \frac{21}{4}}$

$I = \boxed{x^2-16}$; $J = 3^2 - x^2 = \boxed{9-x^2}$; $K = (2x)^2 - 1^2 = \boxed{4x^2-1}$

Développer et réduire, Exercice 9 :

$L = 2 - 2x - x + x^2 = \boxed{x^2-3x+2}$; $M = x^2 - 2\times x\times 2 + 2^2 = \boxed{x^2-4x+4}$

$N = (8x)^2 + 2\times(8x)\times 1 + 1^2 = \boxed{64x^2+16x+1}$; $O = (2x)^2 - 1^2 = \boxed{4x^2-1}$

$$\begin{aligned} P &= 8x^2 - 12x - 14x + 21 - (4x^2 - 12x + 9) \\ &= 8x^2 - 26x + 21 - 4x^2 + 12x - 9 \\ &= \boxed{4x^2 - 14x + 12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= 36 - x^2 - (24 - 6x - 4x + x^2) \\ &= 36 - x^2 - 24 + 10x - x^2 \\ &= \boxed{-2x^2 + 10x + 12} \end{aligned}$$

Factoriser, Exercice 10 :

$A = \boxed{x(2-x)}$

$B = 3x^2\times(-x) + 3x^2\times 3 = \boxed{3x^2(-x+3)}$

$C = 7x\big(x - 3 - (x+2)\big) = 7x(\cancel{x} - 3 - \cancel{x} - 2) = \boxed{-35x}$

$$\begin{aligned} D &= (5x-1)(5x-1) + (5x-1)(3-x) \\ &= (5x-1)(5x-1+3-x) \\ &= \boxed{(5x-1)(4x+2)} \\ &= \boxed{2(2x+1)(5x-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{2}{x} + \frac{x}{x} \\ &= \boxed{\frac{2+x}{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{3x}{x+2} - \frac{5\,(x+2)}{x+2} \\ &= \frac{3x}{x+2} - \frac{(5x+10)}{x+2} \\ &= \frac{3x-(5x+10)}{x+2} \\ &= \frac{3x-5x-10}{x+2} \\ &= \boxed{\frac{-2x-10}{x+2}} = \boxed{-2\times\frac{x+5}{x+2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= 9(1-x^2) \\ &= 9(1^2-x^2) \\ &= \boxed{9(1+x)(1-x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= \big(x+1+2x+3\big)\big(x+1-(2x+3)\big) \\ &= \boxed{(3x+4)(-x-2)} \\ &= \boxed{-(x+2)(3x+4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{x+1}{(x-1)\,(x+1)} - \frac{x-1}{(x-1)\,(x+1)} \\ &= \frac{x+1-x+1}{(x-1)\,(x+1)} \\ &= \boxed{\frac{2}{(x-1)\,(x+1)}} \end{aligned}$$

Factoriser, Exercice 11 :

$$J = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2 = \boxed{(2x+1)^2}$$
$$K = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 = \boxed{(x-5)^2}$$
$$I = 10^2 + 2 \times 10 \times 3x + (3x)^2 = \boxed{(10+3x)^2}$$

Résoudre une équation, Exercice 12 :

$$A.\quad 5x = 20 \iff x = \frac{20}{5} \iff \boxed{x = 4}$$
$$B.\quad x - 5 = 20 \iff x = 20 + 5 \iff \boxed{x = 25}$$
$$C.\quad x + 5 = 20 \iff x = 20 - 5 \iff \boxed{x = 15}$$
$$D.\quad \frac{x}{5} = 20 \iff x = 20 \times 5 \iff \boxed{x = 100}$$
$$E.\quad 5(x-5) = 20 \iff x - 5 = \frac{20}{5} \iff x - 5 = 4 \iff x = 4 + 5 \iff \boxed{x = 9}$$
$$F.\quad 1 + 2x = -9 \iff 2x = -9 - 1 \iff 2x = -10 \iff x = \frac{-10}{2} \iff \boxed{x = -5}$$
$$G.\quad 2x - 3 = 7x + 2 \iff 2x - 7x = 2 + 3 \iff -5x = 5 \iff x = \frac{5}{-5} \iff \boxed{x = -1}$$
$$H.\quad \frac{1}{2}x = \frac{1}{3}x + 4 \iff \frac{3x}{2 \times 3} - \frac{2x}{3 \times 2} = 4 \iff \frac{3x - 2x}{6} = 4 \iff \boxed{x = 24}$$
$$I.\quad \frac{x+2}{2} = \frac{x-3}{3} \iff 3(x+2) = 2(x-3) \iff 3x + 6 = 2x - 6 \iff 3x - 2x = -6 - 6 \iff \boxed{x = -12}$$
$$J.\quad 4\,(2-x) = \frac{7}{2} \iff 2 - x = \frac{7}{8} \iff 2 - \frac{7}{8} = x \iff \boxed{x = \frac{9}{8}}$$
$$\text{ou } J.\quad 4\,(2-x) = \frac{7}{2} \iff 8 - 4x = \frac{7}{2} \iff 8 - \frac{7}{2} = 4x \iff x = \frac{\frac{9}{2}}{4} = \frac{9}{8}$$
$$K.\quad 4x + 21 = 3 - 7x \iff 4x + 7x = 3 - 21 \iff 11x = -18 \iff \boxed{x = -\frac{18}{11}}$$

Jouer avec les équations, Exercice 13 :

$3x(2x+1) - 4$	$(3x+2)^2 - (x+7)(3x+2)$
$2x(x-1) - 4(x-1)$	$2x(x-2) + 5(x-2)$
$(x-5)(x+5)$	$x(18x-23)$
$4x(x-5) + 9$	$(x-1)(2x-4)$
$(4+x)^2 - x^2$	$(2x-4)\,(2x+4) + 5\,(5-4x)$
$(2x-5)(3x+2)$	$3x$
$(6-x) \times \frac{x}{2} + 0,5x^2$	$6x - 1$
$2x^2 + x - 10$	$-(x+6)(x-6)$
$36 - x^2$	$8(2+x)$
$6x(3x-5) + 7x$	$x^2 - 25$

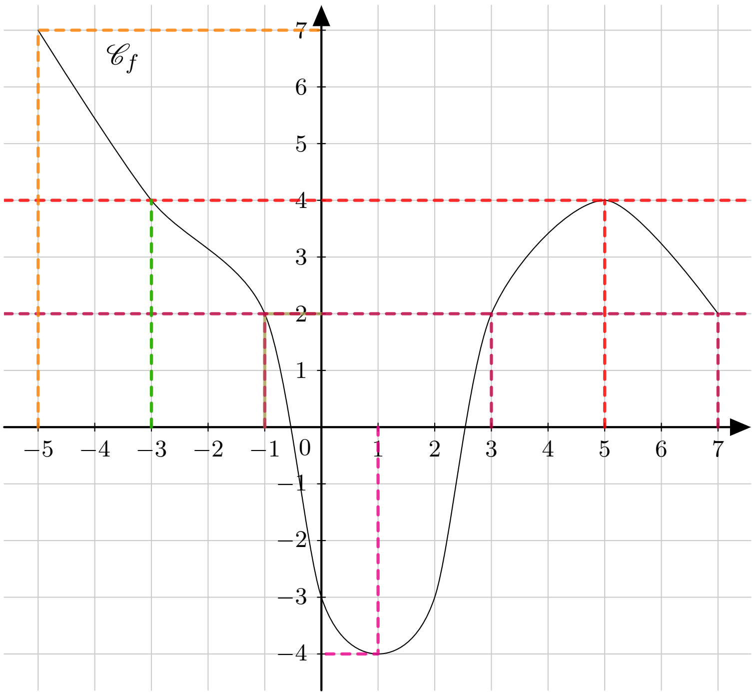
Les expressions restantes sont : $3x \times (2x+1) - 4$ dans la colonne de gauche et $6x - 1$ dans celle de droite.

$$\begin{aligned} 3x \times (2x+1) - 4 &= 3x \times 2x - 3x \times 1 - 4 \\ &= 6x^2 + 3x - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \times (2x+1) - 4 &= 3 \times 2x - 3 \times 1 - 4 \\ &= 6x - 1 \end{aligned}$$

On pouvait donc au choix remplacer le $6x-1$ par $6x^2+3x-4$ ou bien le $3x \times (2x+1) - 4$ par $3 \times (2x+1) - 4$.

Recherche d'images et d'antécédents, Exercice 14 :



1. L'image de -1 par la fonction f est 2 (voir pointillés en jaune).
2. Les antécédents de 2 par la fonction f sont -1, 3 et 7 (voir pointillés en violet).
3. L'image de 1 est -4 (voir pointillés en violet).
4. Les antécédents de 4 par la fonction f sont -3 et 5 (voir pointillés en rouge).
5. L'unique antécédent de 7 par la fonction f est -5 (voir pointillés en orange).
6. L'image de -3 par la fonction f est 4 (voir pointillés en vert).

On connaît de plus l'expression d'une fonction g définie sur le même intervalle par :

$$g(x) = -0,25x^2 + 0,75x + 8.$$

7. On a ici $x = 0$. Il faut donc calculer $g(0)$ en remplaçant x par 0 dans l'expression de la fonction g.
   On a : $g(0) = -0,25 \times 0^2 + 0,75 \times 0 + 8 = 0 + 0 + 8 = 8$.

   L'image de 0 par la fonction g est donc 8.

8. On a ici $x = -4$. Il faut donc calculer $g(x) = -4$ en remplaçant x par -4 dans l'expression de la fonction g.
   On n'oubliera pas d'ajouter des parenthèses autour de -4 si l'on veut que la calculatrice fasse les calculs souhaités !
   On obtient : $g(-4) = -0,25 \times (-4)^2 + 0,75 \times (-4) + 8 = -4 - 3 + 8 = 1$.

   L'image de -4 par la fonction g est donc 1.

9. On a ici $x = -5$. Il faut donc calculer $g(-5)$ en remplaçant x par -5 dans l'expression de la fonction g.
   On n'oubliera pas de mettre des parenthèses autour de -5 pour que la calculatrice fasse les calculs souhaités !
   On a : $g(-5) \;=\; -0,25 \times (-5)^2 + 0,75 \times (-5) + 8 \;=\; -6,25 - 3,75 + 8 \;=\; -2$.

   L'image de -5 par la fonction g est donc -2.

Félicitations pour être arrivé au bout du livret !

« Allez à toutes les classes de vos études. Faites des recherches. Posez des questions. Trouvez quelqu'un faisant ce qui vous intéresse ! Soyez curieux ! » Katherine Johnson (1918-2020)